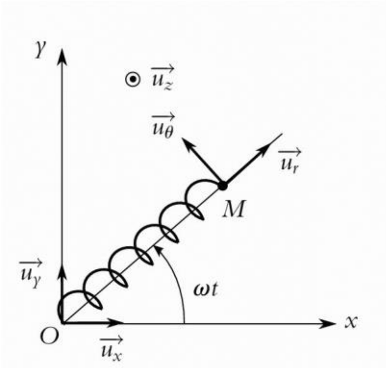
Ressort en rotation.



1. Les trois forces qui s'exercent sur le point M sont le poids et la réaction normale $\overrightarrow{R}_n$ du plan xOy ainsi que la tension du ressort qui est selon OM. Puisque le mouvement est plan et horizontal, les forces verticales se compensent : $\overrightarrow{R}_n + m\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$. Le théorème du moment cinétique s'écrit donc :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$$

puisque $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires. Ainsi $\overrightarrow{L}_O$ est une constante.

2. **a**) L'expression générale du moment cinétique est $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}$. À $t = 0$, la vitesse est nulle donc $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{0}$. Ainsi $\overrightarrow{L}_O$ est nul à tout instant, donc la vitesse est toujours colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ et le mouvement est rectiligne suivant l'axe Ox.

b) La projection de la relation fondamentale de la dynamique sur Ox donne $m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_0)$. Or $x = \ell$ donc on obtient : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0$ avec $\omega_0^2 = k/m$. Les solutions sont sinusoïdales :

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \ell_0 \text{ et } \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$$

Les conditions initiales $x(0) = 1,2\ell_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ entraînent $A = 0,2\ell_0$ et $B = 0$.
L'intervalle de variation de ℓ est donc $[0,8\ell_0, 1,2\ell_0]$.

3. **a**) L'expression générale du moment cinétique en coordonnées polaires est :

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = mr\overrightarrow{u_r} \wedge (\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

À $t = 0$, $\overrightarrow{L}_O = \ell_1\overrightarrow{u_x} \wedge m\ell_1\omega\overrightarrow{u_y}$ soit $\overrightarrow{L}_0 = m\ell_1^2\omega\overrightarrow{u_z}$.

b) L'énergie potentielle élastique est $E_p = \dfrac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2$.

Dans le cas présent, le poids ne travaille pas donc l'énergie potentielle de poids est constante ; on n'a pas besoin d'en tenir compte. La réaction perpendiculaire au mouvement comme le poids ne travaille pas non plus donc le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\mathrm{d}E_c = \delta W = -\,\mathrm{d}E_p \;\Rightarrow\; \mathrm{d}(E_c + E_p) = 0 \;\Rightarrow\; E_m = cte$$

L'expression de E_m en fonction des conditions initiales est :

$$E_m = \frac{m}{2}\ell_1^2\omega^2 + \frac{k}{2}(\ell_1 - \ell_0)^2$$

L'expression générale de E_m est :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$$

c) Puisque le moment cinétique est constant et égal à $mr^2\dot{\theta}$, la vitesse angulaire est de signe constant ici positif en raison des conditions initiales. Donc le module L est égal à $mr^2\dot{\theta}$ et $\dot{\theta} = L/mr^2$. On remplace $\dot{\theta}$ par cette expression dans l'énergie mécanique et on trouve :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 \text{ d'ou } E_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2$$

On a représenté l'allure de la fonction E_{eff} sur la figure

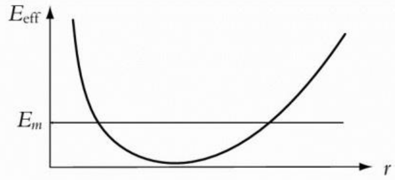


Figure S25.3

Le mouvement ne peut avoir lieu que dans les zones où $E_m \geqslant E_{\text{eff}}$ puisque $m\dot{r}^2 \geqslant 0$, donc la zone de mouvement est sous la droite d'équation $E_{\text{eff}} = E_m$.

d) D'après ce que l'on vient d'écrire, il faudrait une énergie mécanique infinie pour s'éloigner à l'infini de O.

e) La vitesse radiale $\dot{r}$ peut s'annuler au cours du mouvement aux deux points extrêmes pour lesquels $E_m = E_{\text{eff}}$. En revanche la vitesse angulaire ne peut s'annuler car avec la constance de L cela entraînerait $r \to \infty$ ce qui est impossible. La vitesse ne peut donc pas s'annuler.

f) Il faudrait aussi une énergie infinie pour atteindre O.

4. a) Si le mouvement est circulaire r est constant donc $\dot{\theta} = L/mr^2$ est aussi constante.

b) La seule possibilité correspond au minimum de la courbe $E_{\text{eff}}(r)$ sinon comme c'est représenté sur la figure (S25.3), le point M oscille entre deux positions. Il faut donc calculer la position du minimum :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r}(\ell_1) = -\frac{L^2}{m\ell_1^3} + k(\ell_1 - \ell_0) = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{m^2\ell_1^4\omega^2}{m\ell_1^3} + k(\ell_1 - \ell_0) = 0$$

On trouve $\ell_1 = \ell_0 \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$, avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Cette solution est possible si $\omega < \omega_0$.