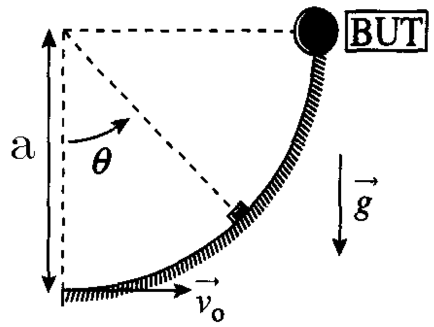
Glissement avec ou sans frottement d'un palet.

Un palet, assimilé à un point matériel de masse m, est lancé avec une vitesse initiale v_0 au bas d'une glissière en forme d'arc de cercle de rayon a.

Le but de cet exercice est d'établir la valeur minimale de la vitesse v_0 permettant d'atteindre la valeur $\theta = \frac{\pi}{2}$ où se trouve un but, et cela pour deux modèles de frottements.

On notera $v_c = \sqrt{2ga}$.



1. Montrer que si l'on pose $u = v^2$ on a $\ddot{\theta} = \frac{1}{2a^2}\frac{du}{d\theta}$. (Si vous n'arrivez pas à établir ce résultat servez-vous en pour la suite de l'exercice)
2. Sans frottement.
   a. Etablir, dans ce cas, l'équation différentielle du mouvement en θ.
   L'exprimer ensuite en fonction de la variable u.
   b. En déduire l'équation d'évolution de la vitesse $v(\theta)$.
   c. Pour quelles valeurs de v_0 le but peut-il être atteint ?
3. Avec frottement fluide.
   On reprend l'étude dans le cas où le frottement peut être représenté par : $\vec{T} = -kv^2\vec{u}_\theta$.
   On notera : $\alpha = \frac{2ka}{m}$.
   a. Etablir, dans ce cas, l'équation différentielle du mouvement en θ.
   Montrer que l'on peut l'écrire sous la forme : $\frac{du}{d\theta} + \alpha u = -v_c^2 \sin\theta$.
   b. La solution particulière de cette équation différentielle est de la forme :
   $u_p(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta$.
   Déterminer les expressions de a et de b en fonction de α et v_c^2.
   c. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle.
   d. Déterminer l'expression de v_0 qui permet d'atteindre le but.
   Commenter les deux cas : $\alpha \to 0$; $\alpha \to \infty$.