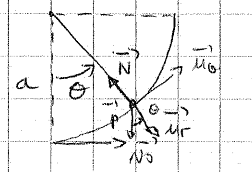
Glissement avec ou sans frottement d'un palet.

1. Relation.

Dans le cas de ce mouvement la vitesse du palet s'exprime



$\vec{v} = a\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

Soit $u = v^2 = a^2\dot{\theta}^2$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = a^2\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = a^2\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = 2a^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

On obtient ainsi

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{1}{2a^2}\frac{du}{d\theta}}$$

2.a Equation différentielle du mouvement

On étudie le palet dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{N}$ du support.

Seconde loi de Newton

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Suivant le vecteur $\vec{u}_\theta$

$$-mg\sin\theta = ma\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0}$$

$$\frac{1}{2a^2}\frac{du}{d\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{du}{d\theta} + 2ga\sin\theta = 0}$$

2.b Fonction $v(\theta)$.

$$\frac{du}{d\theta} - \frac{d}{d\theta}(2ga\cos\theta) = 0 \longrightarrow \frac{d}{d\theta}(u - 2ga\cos\theta) = 0$$

Par intégration on obtient

$u - 2ga\cos\theta = cte$ or à $t = 0$ $\theta = 0$ et $u = v_0^2$

$v_0^2 - 2ga = cte \longrightarrow v^2 - 2ga\cos\theta = v_0^2 - 2ga$

$$\boxed{v^2 = 2ga(-1 + \cos\theta) + v_0^2}$$

2.c Atteinte du but

le but peut être atteint si en $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

On obtient ainsi

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2ga} = v_c}$$

Ainsi pour toutes vitesses initiales $v_0 \geq v_c$ le but pourra être atteint par le palet.

3.a Equations différentielles.

En projection suivant $\vec{u}_\theta$ l'équation du mouvement s'écrit.

$$-mg\sin\theta - kv^2 = ma\ddot{\theta}$$

$$-mg\sin\theta - ku = \frac{m}{2a}\frac{du}{d\theta}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{du}{d\theta} + \frac{2ka}{m}u = -2ga\sin\theta \\ \frac{du}{d\theta} + \alpha u = -v_c^2\sin\theta. \end{array}}$$

le terme α traduit l'importance des frottements à travers sa relation avec k.

3.b Solution particulière.

On pose $u_p(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta$

$$-a\sin\theta + b\cos\theta + \alpha(a\cos\theta + b\sin\theta) = -v_c^2\sin\theta$$

$$(-a + \alpha b)\sin\theta + (b + \alpha a)\cos\theta = -v_c^2\sin\theta$$

En identifiant les termes en $\sin\theta$ et $\cos\theta$ qui sont des fonctions linéairement indépendantes, il vient

$-a + \alpha b = -v_c^2$ et $b + \alpha a = 0$

Donc

$$\boxed{a = \frac{v_c^2}{1+\alpha^2} \quad \text{et} \quad b = -\alpha\frac{v_c^2}{1+\alpha^2}}$$

3.c Solution générale.

L'équation homogène s'écrit $\frac{du}{d\theta} = -\alpha u$. Soit

$\frac{du}{u} = -\alpha\, d\theta$ Par intégration la solution u_h s'écrit.

$$u_h = Ae^{-\alpha\theta}$$

La solution générale s'écrit :

$$u(\theta) = A e^{-\alpha\theta} + \frac{v_c^2}{1+\alpha^2}\left(\cos\theta - \alpha\sin\theta\right)$$

La condition $u(\theta=0) = v_0^2$ permet de déterminer la constante d'intégration A

$$v_0^2 = A + \frac{v_c^2}{1+\alpha^2} \longrightarrow A = v_0^2 - \frac{v_c^2}{1+\alpha^2}$$

Il vient

$$\boxed{u(\theta) = v^2 = v_0^2 e^{-\alpha\theta} + \frac{v_c^2}{1+\alpha^2}\left(\cos\theta - \alpha\sin\theta - e^{-\alpha\theta}\right)}$$

3.d - Vitesse v_0 :

$$u\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad 0 = v_0^2 e^{-\alpha\frac{\pi}{2}} + \frac{v_c^2}{1+\alpha^2}\left(-\alpha - e^{-\alpha\pi/2}\right)$$

$$v_0^2 = \frac{v_c^2}{1+\alpha^2}\left(\alpha + e^{-\alpha\pi/2}\right) e^{+\alpha\pi/2}$$

$$\boxed{v_0 = v_c\left[\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\alpha e^{+\alpha\frac{\pi}{2}} + 1\right)\right]^{1/2}}$$

Pour $\alpha \to 0$ on obtient $v_0 = v_c$ (Pas de frottement, on retrouve le résultat du 2.c)

Pour $\alpha \to \infty$ on obtient $v_0 \to \infty$

Avec un frottement énorme ($k \to \infty$, donc $\alpha \to \infty$) on obtient $u(\theta) = 0$ dès que θ devient supérieur à zéro.