

## Mesure d'une inductance mutuelle.

On écrit les lois des mailles :

$$\begin{cases} e(t) = Ri_1(t) + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2(t) = L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

donc, puisque  $i_2 = 0$  :

$$\begin{cases} e(t) = Ri_1(t) + L \frac{di_1}{dt} \\ u_2(t) = M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

D'après la courbe, on a, pour  $0 < t < \frac{T}{2}$ ,  $e(t) = -e_0 + \frac{4e_0}{T}t$ .

Faisons-nous à un instant  $t$  compris entre 0 et  $\frac{T}{2}$ . On a alors  $e(t) = -e_0 + \frac{4e_0}{T}t$ , donc de la forme

$e = at + b$ . L'intensité  $i(t)$  est donc solution de l'équation :

$$at + b = Ri_1(t) + L \frac{di_1}{dt}$$

La solution de cette équation est la somme de :

– la solution générale de l'équation sans second membre, de la forme  $i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $\tau = \frac{L}{R}$  ;

– une solution particulière de l'équation avec second membre. Le second membre étant une fonction affine, cette solution sera de la forme  $At + B$ .

On aura donc finalement :

$$i_1(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + At + B$$

D'autre part, on sait que  $u_2(t) = M \frac{di_1}{dt}$ . D'après la courbe mesurée,  $u_2(t)$  est constante entre 0 et  $\frac{T}{2}$ ,

il doit donc en être de même pour  $\frac{di_1}{dt}$ . Pour que cela soit le cas, l'exponentielle doit être rapidement négligeable. On doit donc avoir  $\tau \ll T$ , c'est-à-dire :

$$\frac{L}{R} \ll T$$

**Remarque :** R ne doit pas non plus être trop grand, sinon  $u_2(t)$  sera trop faible pour être mesuré.

4) Pour  $0 < t < \frac{T}{2}$ , on a  $u_2(t) = u_{2m}$  et donc  $\frac{di_1}{dt} = \frac{u_{2m}}{M} = \text{cste}$ . En dérivant l'équation  $e(t) = Ri_1(t) + L \frac{di_1}{dt}$

par rapport au temps, on obtient donc :

$$\frac{de}{dt} = R \frac{di_1}{dt} = \frac{Ru_{2m}}{M}$$

car  $\frac{d^2i_1}{dt^2} = 0$ .

Or,  $e(t) = -e_0 + \frac{4e_0}{T}t$ , donc  $\frac{de}{dt} = \frac{4e_0}{T}$ . On en déduit finalement :

$$M = \frac{RTu_{2m}}{4e_0}$$

5) L'application numérique donne  $M = 2,5 \text{ mH}$ .

## Spire carrée mobile aux abords d'une ligne électrique.

L'orientation du circuit est imposée, le vecteur surface est donc orienté selon  $\vec{e}_\theta$  tout le long de la spire carrée (méthode de la main droite). Le champ magnétique dépend de la distance entre le fil et le point d'application.

1) Il faut prendre en compte les variations élémentaires puis intégrer le long du circuit :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{\delta S} = \int_{r=d}^{r=d+a} \int_{z=0}^{z=a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot dr dz \vec{e}_\theta \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{r=d}^{r=d+a} \frac{1}{r} dr \int_{z=0}^{z=a} dz.$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln\left(\frac{a+d}{d}\right).$$

2) Maintenant le cadre est entré en rotation, le vecteur normal à la surface va donc évoluer dans le temps, ce qui va amener un cosinus à cause du produit scalaire :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{\delta S} = \int_{r=d}^{r=d+a} \int_{z=0}^{z=a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot (dr dz \cdot \vec{n}') \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cos(\alpha) \int_{r=d}^{r=d+a} \frac{1}{r} dr \int_{z=0}^{z=a} dz$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln\left(\frac{a+d}{d}\right) \cos(\alpha).$$

On applique ensuite la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln\left(\frac{a+d}{d}\right) \frac{d(\cos(\alpha))}{dt} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln\left(\frac{a+d}{d}\right) \sin(\alpha) \frac{d\alpha}{dt}.$$

3) On prend  $\alpha = \omega t$  On obtient donc :

$$e = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln\left(\frac{a+d}{d}\right) \omega \sin(\alpha).$$

Ce qui implique un courant induit :

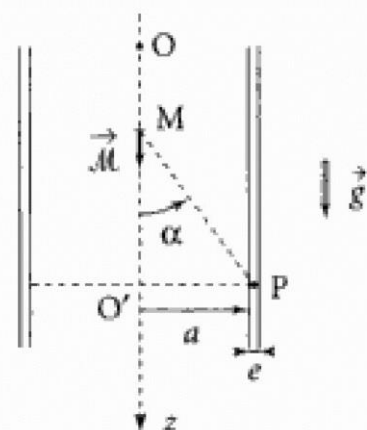
$$i_e = \frac{e}{R} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} a \ln\left(\frac{a+d}{d}\right) \frac{\omega}{R} \sin(\alpha).$$

## Chute d'un aimant dans un tuyau cylindrique.

1. Analyse qualitative :

■ On assimile l'aimant à un moment magnétique  $\vec{M} = M\vec{u}_z$  en chute verticale (effets de  $\vec{g}$ ) selon l'axe Oz. L'aimant crée en P, point fixe du cylindre, un champ magnétique  $\vec{B}(P, t)$  variable dans le temps ( $\alpha$  et MP variables) qui induit un champ électrique  $\vec{E}(P, t)$  (cf. loi de Faraday).

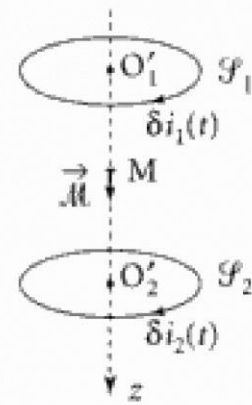
Dans le cas où le cylindre est conducteur, le champ  $\vec{E}(P, t)$  va induire des courants de densité volumique  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  (loi d'Ohm ;  $\gamma$  = conductivité électrique du métal).



Un élément de cylindre de hauteur  $dz$  centré en  $O'$  est alors « réductible » à une spire parcourue par un courant induit  $\delta i(t)$ , et :

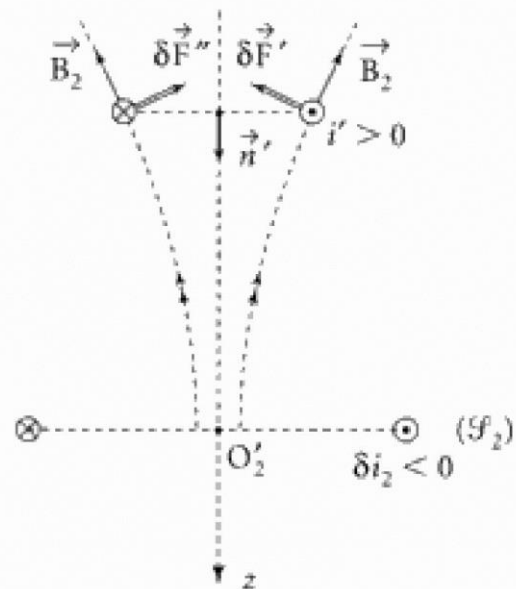
- Le flux créé par ce courant induit à travers une spire  $\mathcal{S}_2$  située en dessous de  $\vec{M}$  doit tendre à compenser l'augmentation de flux résultant du déplacement de l'aimant (normale à la spire selon  $\vec{u}_z$ ).

On doit donc avoir  $\delta i_2 < 0$ . Pour une spire  $\mathcal{S}_1$  située au dessus de  $\vec{M}$  il vient  $\delta i_1 > 0$ , l'aimant s'éloignant de  $\mathcal{S}_1$ .



- Ces courants vont créer à leur tour un champ magnétique  $\vec{b}$  qui va exercer sur  $\vec{M}$  une « force de Laplace » dirigée selon  $Oz$  d'après les symétries du problème :  $\vec{F} = F\vec{u}_z$ . D'après la loi de Lenz (loi de modération) on peut prévoir que  $F < 0$  (la force subie en réaction s'oppose à la cause, à savoir la chute de l'aimant). Vérifions-le en considérant l'interaction {spire  $\mathcal{S}_2$ ,  $\vec{M}$ }. À cet effet, modélisons  $\vec{M}$  par une petite spire  $\mathcal{S}'$  telle que  $\vec{M} = i's'\vec{u}_z$ .

Sur le dessin ci-contre on a représenté, en coupe, la spire  $\mathcal{S}_2$ , le champ  $\vec{B}_2$  qu'elle crée au niveau de  $\mathcal{S}'$ , et les forces de Laplace élémentaires associées à deux éléments de même longueur  $\delta l'$  diamétralement opposés.



On a bien  $\delta \vec{F}' + \delta \vec{F}''$  porté par  $\vec{u}_z$  et dirigé vers le haut.

Cette force  $\vec{F} = F\vec{u}_z$  va donc ralentir la descente de l'aimant, le temps de chute mesuré  $t_c$  devenant plus grand en présence du cylindre conducteur.

Dans le cas où le cylindre est isolant (cylindre en plastique par exemple) il n'y a plus de courants induits et l'aimant subit une chute « libre » selon :

$$z = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow h = \frac{1}{2}gt_c'^2 \rightarrow t_c' = \sqrt{\frac{2h}{g}} < t_c \quad (1)$$

2.

Pour calculer la force de Laplace  $\vec{F} = F\vec{u}_z$  s'exerçant sur l'aimant on va plutôt rechercher celle créée par l'aimant sur le cylindre conducteur puis appliquer le principe de l'action et de la réaction. Commençons donc par nous intéresser à l'interaction  $\vec{M}/\mathcal{S}_2$ .

On a  $\delta\vec{F}' = \delta i_2 \cdot \delta\vec{I}_2 \wedge \vec{B}_M(P)$ .

Par symétrie (invariance par rotation autour de Oz) la force résultante  $\vec{F}'_L$  est portée par  $\vec{u}_z$ , d'où :

$$\delta\vec{F}' = \delta i_2 \oint_{\mathcal{S}_2} a d\theta u_\theta \wedge (B_\alpha \cos\alpha + B_\rho \sin\alpha)\vec{u}'$$

$$\delta\vec{F}' = \delta i_2 2\pi a (B_\alpha \cos\alpha + B_\rho \sin\alpha)(-\vec{u}_z)$$

$$\text{or } B_\rho = \frac{2\mu_0 M \cos\alpha}{4\pi\rho^3}$$

$$\text{et } B_\alpha = \frac{\mu_0 M \sin\alpha}{4\pi\rho^3} \rightarrow \delta\vec{F}' = -\frac{\mu_0 M a^2}{2\rho^3} \delta i_2 3 \cos\alpha \sin\alpha \vec{u}_z$$

$$\text{et avec } \rho = \frac{a}{\sin\alpha} : \delta\vec{F}' = -\delta i_2 \cdot \frac{\mu_0 M}{2a} 3 \sin^4\alpha \cos\alpha \vec{u}_z$$

$$\text{et avec (4) : } \delta\vec{F}' = \frac{9}{8} \frac{\mu_0^2 M^2 \gamma e}{\pi a^5} \sin^8\alpha \cos^2\alpha v dZ \vec{u}_z \text{ avec } Z = z(O'_2).$$

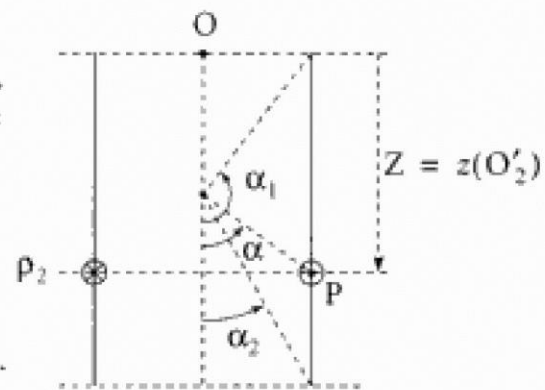
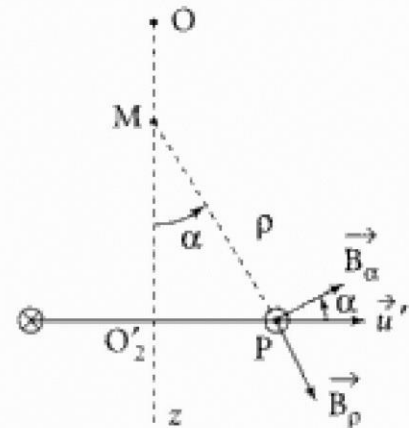
D'où

$$\vec{F} = \ominus \frac{9}{8} \frac{\mu_0^2 M^2 \gamma e}{\pi^2 a^5} v \int_{Z=0}^{Z=h} \sin^8\alpha \cos^2\alpha dZ \vec{u}_z$$

or, à  $t$  fixe  $\alpha$  varie avec  $P$  de  $\alpha_1$  à  $\alpha_2$  avec

$$\cotan\alpha = \frac{Z - z_M(t)}{a} \rightarrow \frac{dZ}{a} = -\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\text{soit } \vec{F} = -\frac{9}{8} \frac{\mu_0^2 M^2 \gamma e}{\pi^2 a^5} v \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^6\alpha \cos^2\alpha d\alpha \vec{u}_z.$$



■ Pour une position de l'aimant suffisamment éloignée des bords on peut faire ( $a \ll h$ ) :

$$\alpha_1 \sim \pi \text{ et } \alpha_2 \sim 0, \text{ d'où } \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^6\alpha \cos^2\alpha d\alpha = \int_0^\pi \sin^6\alpha \cos^2\alpha d\alpha \approx \frac{5}{128}\pi \text{ (cf. énoncé)}$$

$$\text{soit : } \vec{F} = -\frac{45}{1024} \frac{\mu_0^2 M^2 \gamma e}{a^4} v \vec{u}_z \rightarrow \boxed{\vec{F} \approx -4,4 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\mu_0^2 M^2 \gamma e}{a^4} v = -K\vec{v}}$$

### Commentaires

Le coefficient  $K$  est proportionnel à  $M^2$  ce qui est normal puisque l'expression de la force s'exerçant sur  $M$  est directement proportionnelle à  $M$  et que le champ  $\vec{b}$  est induit par le mouvement de  $M$ .

Il augmente également avec la conductivité du milieu, les courants induits étant d'autant plus intenses que  $\gamma$  est grand...

### 3. Application numérique

■ Cylindre non conducteur :  $t'_c \sim \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9,81}} = 0,45 \text{ s}$ , résultat conforme à l'indication de l'énoncé ( $t'_c = 0,46 \text{ s}$ ).

■ Cylindre conducteur :

L'équation du mouvement (en négligeant l'action de l'air) est donnée par :

$$m \frac{dv}{dt} + Kv = mg$$

soit en posant  $\tau = \frac{m}{K}$  :  $\tau \frac{dv}{dt} + v = v_l = \frac{mg}{K}$ .

Il apparaît une vitesse limite  $v_l = \frac{mg}{K}$ . Soit en supposant le temps de chute  $t_c$  suffisamment grand devant  $\tau$  :

$$t_c - \frac{h}{v_l} = \frac{hK}{mg}$$

pour un cylindre en cuivre on obtient :  $K = 0,74 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\tau = 0,01 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_c \sim 9,5 \text{ s}$$

pour un cylindre en aluminium :

$$K = 0,47$$

$$\tau = 0,02 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_c \sim 6 \text{ s}$$

Ces résultats semblent convenables...