Mouvement d'un cadre dans un champ magnétique uniforme et permanent.

1. Etude qualitative.

Le déplacement du cadre provoque un phénomène d'induction du fait de l'existence d'une variation du flux du champ magnétique à travers la surface de ce cadre.

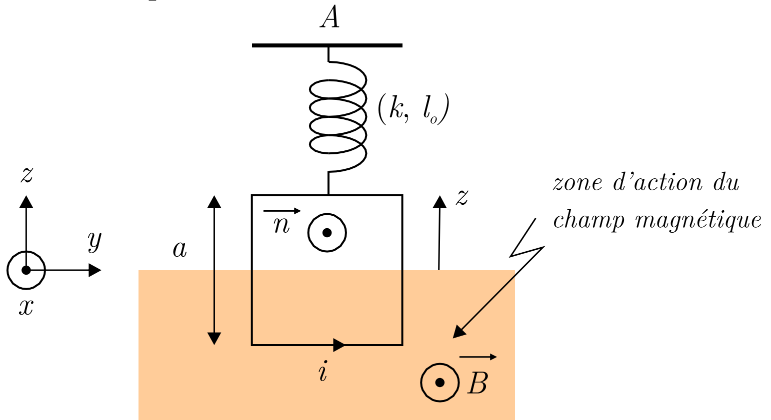
Une force électromotrice d'induction apparaît qui est à l'origine de l'établissement d'un courant induit dans le cadre qui forme un circuit fermé. Ce courant génère une force de Laplace dont l'effet est de s'opposer à la cause qui lui donne naissance qui est ici le mouvement du cadre et cela en vertu de la loi de Lenz. Les forces de Laplace sont donc toujours opposés en sens à celui du vecteur vitesse. Les *oscillations* du cadre seront donc *amorties*.

L'énoncé (question 4) suggère que ces oscillations seront pseudo-périodiques.

2. Force électromotrice d'induction.

Dans cet exercice, on néglige les phénomènes d'auto-induction car le texte ne fait pas référence à l'inductance du circuit (qui est effectivement négligeable dans le cas d'un circuit constitué d'une seule spire).

Sur le schéma est précisé le sens positif arbitraire d'orientation du circuit et donc de l'intensité.



On calcule dans un premier temps le flux du champ magnétique à travers ce circuit orienté en notant que ce flux est nul à une date donnée t pour la surface délimitée par la cote $z > 0$:

$$\varphi = \iint_{cadre} \vec{B}.d\vec{S} = \iint_{cadre} B\vec{u}_x.dydz\vec{u}_x = B\int_{y}^{y+a} dy \int_{z-a}^{0} dz = Ba\left(z-a\right)$$

On applique ensuite la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -aB\frac{d\left(z-a\right)}{dt}$$

$$\boxed{e = aB\dot{z}} \qquad \left(1\right)$$

Le cadre, formant un circuit fermé, est alors parcouru par un courant induit i.

3. Equation d'évolution de $Z(t)$.

On étudie le mouvement du cadre dans le référentiel terrestre posé galiléen.

Ce système est soumis à l'action de :

Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;

La tension du ressort $\vec{T} = -k\left(l - l_o\right)(-\vec{u}_z) = k\left(l - l_o\right)\vec{u}_z$ où l est la longueur du ressort à une date t et l_o sa longueur à vide ;

La force de Laplace $\vec{F}_L$ dont la résultante s'écrit $\vec{F}_L = ia\vec{u}_y \wedge B\vec{u}_x = -iaB\vec{u}_z$ car le champ magnétique est uniforme et que la résultante des forces de Laplace est nulle sur les brins verticaux car parcourus par un courant de sens contraire.

La seconde loi de Newton projection suivant $\vec{u}_z$:

$$-mg + k\left(l - l_o\right) - iaB = m\ddot{z} \qquad (2)$$

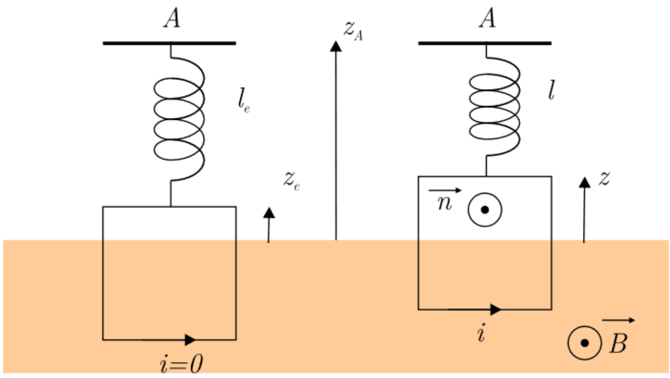
Lorsque le cadre est à l'équilibre on n'a plus de courant induit. Dans cette situation l'équation précédente s'écrit :

$$-mg + k\left(l_e - l_o\right) = 0 \qquad \left(3\right)$$ avec l_e, la longueur du ressort à l'équilibre.

En soustrayant à l'équation (2) l'équation (3) on obtient :

$$k\left(l - l_o\right) - k\left(l_e - l_o\right) - iaB = m\ddot{z}$$

$$-k\left(l_e - l\right) - iaB = m\ddot{z}$$



Situation d'équilibre Situation quelconque

On peut remarquer compte tenu du schéma ci-dessus que :

$$z\left(A\right) = z_A = l_e + z_e = l + z$$

$$l_e - l = z - z_e$$

L'équation du mouvement devient :

$$-k\left(z - z_e\right) - iaB = m\ddot{z}$$

On détermine maintenant l'expression de l'intensité i. Comme l'inductance du cadre est négligée, la loi des mailles s'écrit ici :

$$e - Ri = 0$$

$$i = \frac{e}{R} = \frac{aB\dot{z}}{R}$$

Ainsi :

$$-k\left(z - z_e\right) - \frac{a^2B^2}{R}\dot{z} = m\ddot{z}$$

$$\ddot{z} + \frac{a^2B^2}{mR}\dot{z} + \frac{k}{m}\left(z - z_e\right) = 0$$

On pose $Z = z - z_e \Rightarrow \dot{Z} = \dot{z}$, $\ddot{Z} = \ddot{z}$. On obtient ainsi l'équation différentielle d'un oscillateur amorti :

$$\ddot{Z} + \frac{a^2B^2}{mR}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$$

4. Période des oscillations et temps caractéristique.

Pour avoir des oscillations amorties il faut que le discriminant de l'équation caractéristique soit négatif :

$$r^2 + \frac{a^2B^2}{mR}r + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{a^2B^2}{mR}\right)^2 - 4\frac{k}{m} < 0$$

Dans ce cas la pseudo-période des oscillations amorties est :

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{4\frac{k}{m} - \left(\frac{a^2B^2}{mR}\right)^2}}$$

En posant $\frac{1}{\tau} = \frac{a^2B^2}{mR}$ et $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$, la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$Z(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) \text{ avec } \Omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_o^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

Le temps caractéristique de l'amortissement des oscillations est :

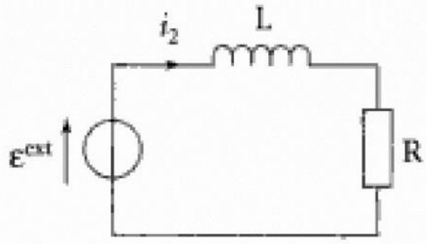
$$\tau_a = 2\tau = 2\frac{mR}{a^2B^2}$$

Remarque :

La durée τ est la durée caractéristique de la *décroissance énergétique* du système lors d'oscillations amorties.

Lévitation d'une spire.

1. Équation électrique :



$$\varepsilon^{ext} = Ri_2 + L\frac{di_2}{dt}$$

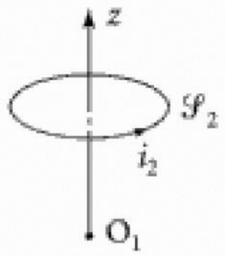
$$\varepsilon^{ext} = -\frac{d\phi^{ext}}{dt} \quad \text{où} \quad \phi^{ext} = \pi a^2 B_m \cos\omega t$$

où $B_m = B_m(z = h)$

soit : $Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} = \pi a^2 B_m \omega \sin(\omega t)$.

En régime sinusoïdal établi :

$$i_2(t) = \mathrm{Im}(\underline{i_2}(t)) = \mathrm{Im}[\underline{I_2}\exp(j\omega t)]$$



avec

$$(R + jL\omega)\underline{I_2} = \pi a^2 B_m \omega \rightarrow \underline{I_2} = \frac{\pi a^2 B_m \omega}{R^2 + L^2\omega^2}(R - jL\omega)$$

d'où :

$$\boxed{i_2(t) = \frac{\pi a^2 B_m \omega}{R^2 + L^2\omega^2}\{R\sin(\omega t) - L\omega\cos(\omega t)\}} \quad (1)$$

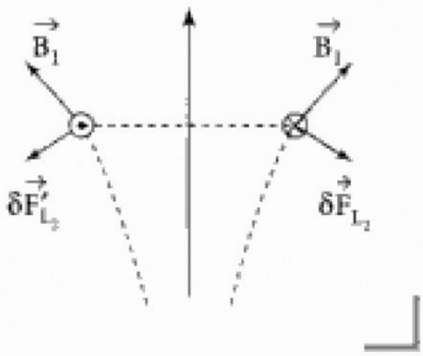
2. a. Le système est invariant par rotation autour de Oz il doit donc en être de même de la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur $\mathcal{S}_2$, d'où :

$$\vec{F}_{L_2} = F_{L_2}\vec{u}_z.$$

Commentaire

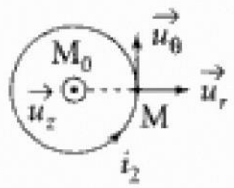
On peut également remarquer qu'en associant deux éléments δl_2 diamétralement opposés on a :

$$\delta\vec{F}_{L_2} + \delta\vec{F}'_{L_2} \;//\; \vec{u}_z.$$



Soit $F_{L_2} = \oint(i_2\overrightarrow{\delta l_2} \wedge \vec{B}_1)\cdot\vec{u}_z$

$$F_{L_2} = i_2\oint(a\,d\theta\,\vec{u}_\theta \wedge \vec{B}_1)\cdot\vec{u}_z = i_2 a\oint(\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta)\cdot\vec{B}_1\,d\theta$$



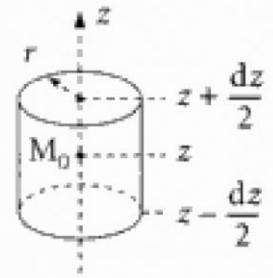
ou encore : $F_{L_2} = -i_2 a\oint(\vec{B}_1\cdot\vec{u}_r)d\theta$.

La symétrie axiale implique que la quantité $\overrightarrow{B_1} \cdot \overrightarrow{u_r}$ est indépendante du point M de la spire, d'où :

$$\boxed{F_{L_z} = -2\pi a \cdot i_2(t) \cdot B_{1_r}(r = a, z)} \quad (2)$$

b. $\overrightarrow{B_1}$ est le champ créé par la bobine. En coordonnées cylindriques d'axe Oz, on a :

$$\overrightarrow{B_1} = B_{1_z}\overrightarrow{u_z} + B_{1_r}\overrightarrow{u_r}.$$



Le champ magnétique étant à flux conservatif, il vient :

$$\phi_{\Sigma_f}(\overrightarrow{B}) = 0 \rightarrow B_{1_r} 2\pi r\,dz + \phi\left(z + \frac{dz}{2}\right) - \phi\left(z - \frac{dz}{2}\right) = 0$$

($\Sigma_f \equiv$ surface fermée entourant le point M_0 de cote z).

Or $\phi\left(z + \frac{dz}{2}\right) - \phi\left(z - \frac{dz}{2}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial z}dz$, où $\phi(z) = \pi r^2 B_{1_z}(r = 0, z, t)$.

Finalement : $B_{1_r}(r, z, t) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_{1_z}(0, z, t)}{\partial z}$.

Soit au niveau de la spire où $r = a$ et $B_{1_z}(0, z, t) = B_m(z)\cos(\omega t)$:

$$\boxed{B_{1_r}(a, z, t) = -\frac{a}{2}\frac{dB_m(z)}{dz}\cos(\omega t)}$$

c. Les résultats (2) et (3) donnent :

$$F_{L_z} = (-2\pi a\, i_2(t))\left(-\frac{a}{2}\frac{dB_m}{dz}\cos(\omega t)\right)$$

et avec (1) :

$$F_{L_z} = \pi a^2 \frac{\pi a^2 \omega}{R^2 + L^2\omega^2}\{R\sin(\omega t) - L\omega\cos(\omega t)\}\cos(\omega t) \cdot B_m(z)\frac{dB_m}{dz}$$

d'où $\langle F_{L_z} \rangle = \frac{\pi^2 a^4 \omega}{R^2 + L^2\omega^2} B_m \frac{dB_m}{dz}\{R\langle \sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle - L\omega\langle \cos^2(\omega t)\rangle\}$

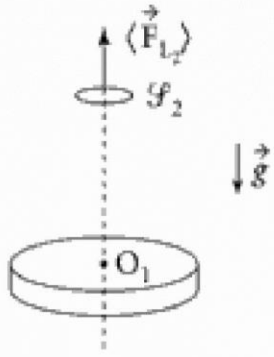
or $\langle \sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle = 0$ et $\langle \cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}$, soit :

$$\boxed{\langle F_{L_z} \rangle = \frac{\pi^2 a^4 L\omega^2}{4(R^2 + L^2\omega^2)} \cdot \left(-\frac{dB_m^2}{dz}\right)}$$

C'est une fonction croissante de la pulsation ω, et pour $\omega \gg \frac{R}{L}$ on a :

$$\langle F_{L_z} \rangle \approx \frac{\pi^2 a^4}{4L} \cdot \left(-\frac{dB_m^2}{dz}\right).$$

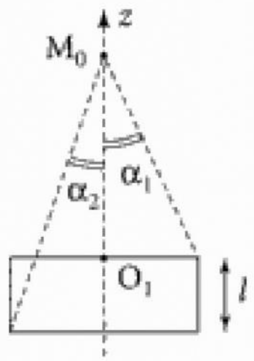
De plus le module du champ créé par la bobine sur son axe décroît quand z augmente (origine des z positifs en O_1) ; dès lors $\left(-\frac{dB_m^2}{dz} > 0\right)$, et la force moyenne de Laplace s'exerçant sur la spire est positive, ce qui peut lui permettre d'équilibrer le poids de $\mathcal{S}_2$…



3. *Application numérique* :

■ $R = 1{,}7 \cdot 10^{-4}\ \Omega$; $L = 1{,}2 \cdot 10^{-8}\ H \rightarrow f \gg 2{,}25$ kHz.

■ $B_1 = \frac{\mu_0 n I_m}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\cos(\omega t) = B_m(z)\cos(\omega t)$



soit $B_m(z) = \frac{\mu_0 n I_m}{2} \cdot \left[\frac{l+z}{\sqrt{(l+z)^2 + b^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}}\right]$;

$\left(n = \frac{N}{l}\right)$

et $B_m(h) = KI_m$ avec $\mathbf{K \approx 1{,}9 \cdot 10^{-3}}$ **SI**.

D'autre part :

$$\frac{dB_m}{dz} = \frac{\mu_0 n I_m}{2} b^2 \left[\frac{1}{((l+z)^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{(z^2 + b^2)^{3/2}}\right] = K' I_m$$

avec $\mathbf{K' = -9{,}9 \cdot 10^{-2}}$.

La spire est en équilibre à une altitude h de la bobine pour I_m tel que :

$$\frac{\pi^2 a^4}{2L} KI_m \cdot (-K'I_m) = mg = \rho 2\pi a \cdot \pi e^2 \cdot g$$

soit $I_m^2 = \frac{4\rho e^2 L g}{(-KK')a^3} \rightarrow I_m = 13{,}4\ A \rightarrow \mathbf{I_{eff} = 9{,}5\ A}$.